214. 代數方程式ニ關スル掛谷先生ノ定理ニ就テノ断想

高 橋 進 一 (阪大)

近着ノ Jahresbericht d. D. M. V. ヲ見マシタラ Werner Schulz トイフ人ガ

Bemerkungen zu einer Abhandlung von Herrn Takahashi

トイフ見出シデ東北數學雜誌林先生還暦記念号ニ書キマシタ私ノ論文ニ若干ノ remark ヲ述ベテ居ルノガ目ニ止マリマシタ。Werner Schulz トイフ名ハ私ニトッテ全ク初耳デスガ同氏ノ研究ニ依ルト私ガ定理Bト名附ケタモノハ全然 "wertlosigkeit" デアルトイフコトデス。先ヅ定理Aトイフノヲ述ベルト

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_n$$

ナル多項式ノ係數ハ凡テ實數デ且ツ

$$a_\nu + a_{\nu+1} - 2a_{\nu+2} \geqq 0 \quad \begin{pmatrix} \nu = -1, 0, 1, \cdots\cdots, n \\ a_{-1} = a_{n+1} = a_{n+2} = 0 \end{pmatrix}$$

ナラバ $f(x) = 0$ ノ根ハ單位円外ニハ存在シナイ。

S. 氏ハ先ヅコノ定理ニ於テ如何ナル條件ノモトニ $f(x) = 0$ ノ根ガ單位円周上ニアルカヲ研究シ又 $n+2$ ガ odd prime number カ乃至ハ２ノ整數冪ノ時ハ根ハ全部單位円内ニアルトイフコトモ明カニシテ居マス。

次ニ定理Bトイフノハ

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$

ナル多項式ノ係数ハ凡テ実数デ且ツ

(1) $a_\nu-3a_{\nu+1}+3a_{\nu+2}-a_{\nu+3}\geqq 0$

(2) $a_\nu+a_{\nu+1}-a_{\nu+2}-a_{\nu+3}\geqq 0$

(3) $a_\nu-a_{\nu+1}+a_{\nu+2}-a_{\nu+3}\geqq 0$

(4) $a_\nu-2a_{\nu+1}+2a_{\nu+2}-a_{\nu+3}\geqq 0$

$$\left(\begin{array}{l}\nu=-2,-1,0,\cdots\cdots,n\\ a_{-2}=a_{-1}=0\\ a_{n+1}=a_{n+2}=a_{n+3}=0\end{array}\right)$$

ノ何レカ一ツノ條件ヲ満足スルナラ $f(x)=0$ ノ根ハ単位円外ニハ存在シナイ。

S.氏ハ此ノ定理ノ條件(1),(2)ハ其自身矛盾シテ居リ、又(3)ノ條件ハ $n\equiv 1\ (\mathrm{mod.}\ 4)$ ノトキハ成立シ得ルが其ノトキハ $f(x)(x+1)^{-1}$ ナル多項式が掛谷ノ條件ヲ満足スルノデ問題ハナク、更ニ(4)ノ條件ハ $m\equiv 3\ (\mathrm{mod.}\ 6)$ ノトキハ成立シ得ルが其ノ時ハ $f(x)(x^3+2x^2+2x+1)^{-1}$ ナル多項式が掛谷ノ條件ヲ満足スルノデヤハリ問題ハナク結局定理Bハ意味ナシトイフコトヲ示シマシタ。

一体此等定理ノ出シ方ノ principle トイフノハ $f(x)=0$ ノ代リニ其ノ零点が凡テ単位円外ニハナイ多項式 $\varphi(x)$ ヲ任意ニコシラヘテ $\varphi(x)f(x)=0$ ナル代数方程式ヲ考ヘ之ニ

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$$

ノ根ノ絶對値ハ

$$Max\left(1, \frac{|a_1|+|a_2|+\cdots\cdots+|a_n|}{|a_0|}\right)$$

ヨリ大キクハナイトイフヨク知ラレタ定理ヲ apply シタノデス。此ノ Hurwitz ノ方法ヲ用ヒナイデ掛谷先生ノ定理ソノ他ヲ出スヤリ方ハ1931年ニ Montel ガ Comptes Rendus ニ發表シテ居マスガ同論文ヲ Julius V. Nagy ガ "Zentralblatt" ニ referat シタノヲ讀ムト著者ハ文献ヲ餘リ知ラナイラシイト云ツテ私ガ數物記事(1931)ニ出シタ論文 A Note on Kakeya's theorem on Algebraic Equation ヲ擧ゲテ居マスノデ或ハ私ノガ Montel ノヨリモ少シ早ク出タノカモ知レマセン。

何レニシテモ $\varphi(x)$ ハ任意ナノダカラ掛谷先生ノ定理ヨリモ、モツト一般ナ定理ガイクラデモ得ラレルノダラウト勝手ニ想像シテ一ツノ example トシテ上述ノ定理A,Bヲ書イテ見タノデスガ、今定理Bガ全然成立シナイコトガ明ラカニサレルト、モウ一度愼重ニ考ヘ直シテ見ナケレバナリマセン。

相續ク3ツノ係數ニツイテノ條件カラ初メシノハ上述ノ定理Aノ他ニ Lipka ト Egerváry ノヤツタ面白

イ定理ガアルノハ周知ノ事柄デスガ、相続ク4ツノ係数ニ就テノ條件デハ先ヅ考ヘ得ラレル case トシテハ上述ノ(1), (2), (3), (4)デスカラ此等ガ何レモ成立シナカツタリ、或ハ trivial ナモノトナルノナラ今度ハ5ツ, 6ツト係数ノ数ヲ増加シテ來レバ尚更其等ノ定理ノ成立ガ怪シクナツテ來マス。

一方 principle トシテハ $\varphi(x)$ ハ全ク任意ニ作リ得ルノデスカラ此処ノ gap ガモット研究サレル必要ガアリマス。デ若シモ掛谷先生ノ定理ヲ拡張スルトシテモ其等ハ相続ク3ツノ係数間ノ條件ニ限ラレルトイフコトデモ明ラカニサレタラ其ニ依ツテ益々掛谷先生ノ定理ノ偉大サヲ知リ得ル譯デス。何レニシテモ現在ノ私ニハ既ニ此ノ問題ヲ研究スル熱モ、亦時間モナイノデスガ、ドナタカ考ヘテ下サツテ不安定ナ所ヲ完全ニ解決出來マシタラ掛谷先生ノ定理ハ愈々其光彩ヲ放ツダラウト信ジマス。

次ニ前掲ノ数物記事ニ於ケル私ノ論文デハ主トシテ係数ガ複素数トナル場合ヲ考ヘタノデスガ、今

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$

ナル多項式ノ係数ハ一般ニ complex ナリトシテ

(5) $\quad |a_0|\geqq|a_1|\geqq\cdots\cdots\geqq|a_n|$

ノ條件ノモトニ $f(x)=0$ ハドンナ半径ノ円内ニアルカトイフノガ問題デシタ。

此ノ場合ハ兎ニ角2ナル半径ヲ持ツ円外ニハ根ガ全然ナイコ

トガ直チニ分リマス。何故カト云ヘバヨク知ラレタ定理ニ依ツテ $f(x)=0$ ノ根ノ絶對値ハ

$$1+\frac{\mathrm{Max}(|a_1|,|a_2|,\cdots\cdots,|a_n|)}{|a_0|}$$

ヲ超エズ (5) ノ條件ガアレバ明オニ $\leqq 2$ トナルカラデス。モ少シ特殊ナ多項式

$$f(x)=(p_0+iq_0)x^n+(p_1+iq_1)x^{n-1}+\cdots\cdots+(p_n+iq_n)$$

$$(6)\qquad \begin{aligned} &p_0\geqq p_1\geqq\cdots\cdots\geqq p_n>0\\ &q_0\geqq q_1\geqq\cdots\cdots\geqq q_n>0 \end{aligned}$$

デスト $f(x)=0$ ノ根ハ凡テ $\sqrt{2}$ ナル半径ヲ持ツ円外ニハナイ事モ分リマシタ。

所ガ

$$(p_0+iq_0)x^2+(p_1+iq_1)x+(p_2+iq_2)=0$$

$$p_0\geqq p_1\geqq p_2\geqq 0,\quad q_0\geqq q_1\geqq q_2>0$$

ナル二次方程式デ其根ノ絶對値ガ1ヨリ大キクナル example ヲ作ツテ見ヨウト思ツテ随分苦心シマシタガ私ニハ到頭出來マセンデシタ。

ソレデ存外 (6) ノヤウナ場合ニハ其ノ根ハ全部単位円内乃至ハ其ノ周上ニアルノカモ知レズ此ノ点ヲモ誰カニ考ヘテ貰ヒタイト常々思ツテ居マス。又 (5) ノ場合ニハ、タトヘ根ガ単位円外ニ飛出シタトシテモ其ハホンノ僅カノ程度ニ過ギナイカモ知レズ此ノ点モモツト明カニシタイモノデス。